Semester: ______________________ Datum: ____________

Name: ______________________ Blatt: ____________

Exponentielles Wachstum

Eigentlich funktioniert die Berechnung des exponentiellen Wachstums ganz ähnlich wie die Zinseszinsrechnung.

Die exakt gleiche Formel, nur andere Buchstaben:

Zinsenzinsrechnung: $K_n = K_0 \cdot q^n$

Exponentielles Wachstum: $N_t = N_0 \cdot a^t$

$N_{(t)}$ ist die Größe von einem Wert **N** nach **t** Schritten oder Wiederholungen (t = time).

N_0 ist die Größe von einem Wert **N** zur Zeit 0, also vor dem ersten Schritt, d.h. zu Beginn.

a ist der Wachstumsfaktor (oder der Zerfallsfaktor bei der umgekehrter Rechnung) Es ist immer eine Zahl ≠ (ungleich) 0.

t ist die Anzahl der Schritte bzw. der Wiederholungen.

Einführungsbeispiele

1. Zinseszinsrechnung

Herr Müller legt 500 € bei einer jährlichen Verzinsung von 3% an. Wie viel Geld hat Herr Müller nach 5 Jahren?

Gesucht ist K_n *hier:* N_t

$K_0 = 500$ € *hier:* N_0

$p = 3\% = 0{,}03$

$q = 1 + 0{,}03 = 1{,}03$ *hier:* a

$n = 5$ Jahre *hier:* t

Dann setzt man in die Funktionsgleichung ein und berechnet den Wert.

$K_5 = 500 \cdot 1{,}03^5 = 579{,}64$ € *hier:* $N_5 = 500 \cdot 1{,}03^5 = 579{,}64$ €

2. Bakterienwachstum

Ein Bakterium teilt sich nach jeder Stunde in zwei neue Bakterien. Jedes weitere Bakterium teilt sich auch wieder jede Stunde. Wie viele Bakterien sind es nach einem Tag?

Man schreibt zunächst die gegebenen Werte auf.

Gesucht ist: $N_t = N_{24}$, denn der Prozess der Zellteilung dauert einen Tag, also 24 Stunden

$N_0 = 1$, denn es gab zu Beginn **1** Bakterie

$p = 1$, denn es wird bei jeder Zellteilung immer **1** Bakterie mehr.

$a = 1 + 1 = 2$

$t = 24$

$N_{24} = 1 \cdot 2^{24} = 16.777.216$

Nach einem Tag sind es also 16.777.216 Bakterien.

Semester: ______________________ Datum: ____________

Name: ______________________ Blatt: ____________

3. Zombie-Apokalypse

Plötzlich bricht die Zombieapokalypse aus! Es beginnt mit einem einzigen Zombie, der pro Stunde zwei weitere Menschen infiziert. Jeder neue Zombie tut es ihm gleich.

Frage: Wie viele Menschen sind nach 6 Stunden bereits zu Zombies geworden?

Nach einer Stunde hat der erste Zombie zwei Menschen infiziert. Das bedeutet, dass es **nach einer Stunde** insgesamt **drei** Zombies gibt.

In der nächsten Stunde greift jeder der drei Zombies zwei weitere Menschen an. Insgesamt sind das $3 \cdot 2 =$ **6 weitere** Menschen. Das wiederum bedeutet, dass es **nach zwei Stunden** ganz genau **neun** Zombies gibt.

Nach drei Stunden wird es also $9 \cdot 2 =$ **18 weitere** Zombies und **insgesamt 27** Zombies geben.

Man erkennt, dass die jeweiligen Anzahlen 3, 9, 27 Dreierpotenzen sind, sich der Wert also immer verdreifacht. **a** hat also den Wert **3.**

Begonnen hat die Apokalypse mit einem einzigen Zombie. $\mathbf{N_0}$ hat also den Wert **1**.

Da ermittelt werden soll, wie viele Zombies es nach 6 Stunden gibt, hat **t** den Wert **6**.

Wenn man in die Funktionsgleichung $\mathbf{N_t = N_0 \cdot a^t}$ die ermittelten Werte einträgt, ergibt sich die Formel $\mathbf{N_6 = 1 \cdot 3^{6} = 729}$.

Die Antwort lautet also: Innerhalb von 6 Stunden gibt es 729 Zombies.

4. Verschwendungssucht I

Ein Mann besitzt 1.000.000 €. Er gibt jedes Jahr die Hälfte seines Geldes aus. Wie Geld hat er nach 10 Jahren?

$N_0 = 1.000.000$ €

$p = - 50\% = - ½ = - 0{,}5$

$a = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$t = 10$

$N_{10} \quad = N_0 \cdot a^n = 1.000.000 \cdot 0{,}5^{10} = 976{,}56$ €

5. Verschwendungssucht II

Ein Mann besitzt 1.000.000 €. Er gibt jedes Jahr ein Drittel seines Geldes aus. Wie Geld hat er nach 10 Jahren?

$N_0 = 1.000.000$ €

$p = - ⅓$

$q = 1 - ⅓ = ⅔ = 0{,}66$

$t = 10$

$N_{10} \quad = N_0 \cdot a^n = 1.000.000 \cdot ⅔^{10} = 17.341{,}53$ €

$N_{10} \quad = N_0 \cdot a^n = 1.000.000 \cdot 0{,}66^{10} = 15.683{,}37$

Hinweis: Die Lösung mit ⅔ statt 0,66 ist viel genauer, da in diesem Falle mit viel mehr Nachkommstellen (0,6666….) gerechnet wird und das Ergebnis somit auch größer werden muss.